связано с кручением почти комплексной структуры $T(X,Y)$ формулой [3]:

$$T(JX,JY)-JT(JX,Y)-J(T(X,JY))-T(X,Y)=\frac{1}{2}t(X,Y). \quad (7)$$

Но

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\tilde{\nabla}_X Y=h(X,Y),$$

где $h(X,Y)$ –2-я билинейная форма структуры J на многообразии $\mathcal{K}$.Форма $h(X,Y)$ будет определяться полиномиальным морфизмом по формуле (4).
Тогда и (7) будет определяться полиномиальным морфизмом,так как (6) выражается полиномом.

Список литературы

1.Ведерников С.В. Геометрия пространства пар.- Известия АН БССР.Рукопись депонирована в ВИНИТИ 15 апреля 1980г.,№ 1454-80 Деп.

2.Евтушик Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-Проблемы геометрии,1979,т.9,с.5-246.

3.Кобаяси С.,Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, М.,1981,т.2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Ю.Е.Гликлих

О РИМАНОВЫХ МЕТРИКАХ,ОБЛАДАЮЩИХ РИМАНОВЫМ РАВНОМЕРНЫМ АТЛАСОМ

При изучении ряда вопросов теории стохастических дифференциальных уравнений на многообразиях (см.[1,2]) предполагаются выполненными некоторые условия на многообразие,которые можно свести к единственному требованию:нужно,чтобы многообразие допускало риманову метрику,обладающую римановым равномерным атласом.В настоящей работе показано,что на любом многообразии существует риманова метрика,обладающая римановым равномерным атласом.Для доказательства мы модифицируем методы [3,4] исследования выпуклых окрестностей и полных метрик. В определенном смысле результаты работы являются обобщением [3]:метрика,обладающая римановым равномерным атласом,очевидно,является полной и,так же как в [3],указанная метрика может быть построена как конформная для любой заранее заданной метрики.

Пусть M –связное конечномерное риманово многообразие, ρ –функция риманова расстояния на M (см.[4]).

Определение. Атлас на M назовем равномерным римановым,если для любой точки $m\in M$ существует карта (U,φ), $U\ni m$ из этого атласа,такая,что U содержит метрический шар $B(m,r)$ с центром в m фиксированного радиуса $r>0$ относительно риманова расстояния ρ.

Отметим,что метрический шар $B(m,r)=\{n\in M \mid \rho(m,n)<r\}$, вообще говоря,не гомеоморфен шару модельного пространства и может иметь сложную топологическую структуру.

Теорема. Для любой римановой метрики на M существует конформная ей риманова метрика,обладающая римановым равномерным атласом.

2 Зак. 1401

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько технических утверждений.

Зададим на M риманову метрику $\langle,\rangle$, (т.е. $\langle,\rangle_m$ - скалярное произведение в касательном пространстве T_mM) и пусть d -соответствующее $\langle,\rangle$ риманово расстояние на M. Как известно (см.[5]), для любой точки $m \in M$ существует число $a(m)>0$, такое, что d -метрический шар $B(m, a(m))$ принадлежит нормальной координатной окрестности (карте) любой точки $n \in B(m,a(m))$. Обозначим через $\tau(m)$ точную верхнюю грань множества таких $a(m)$, для которых $B(m, a_1(m)) \neq B(m, a_2(m))$ при любом $a_1(m) < a_2(m)$.

Если $\tau(m^*)=\infty$ для некоторой точки $m^* \in M$, то доказательство теоремы тривиально. Предположим, что $\tau(m) < \infty$ для всех $m \in M$.

Л е м м а 1. Для любых двух точек $m,n \in M$ выполняется неравенство

$$|\tau(m)-\tau(n)| \leq d(m,n). \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай $n \in B(m,\tau(m))$. Тогда $B(n, \tau(m)-d(m,n)) \subset B(m,\tau(m))$, и по определению $\tau(n)$ имеем $\tau(n) \geq \tau(m) - d(m,n)$. Если $\tau(m) \geq \tau(n)$, то (1) доказано. Если $\tau(n) > \tau(m)$, то $m \in B(n, \tau(n))$ и, следовательно, $\tau(m) \geq \tau(n) - d(m,n)$, что и доказывает (1). Случай $m \in B(n,\tau(n))$ полностью аналогичен. В оставшемся случае, из того, что $n \notin B(m,\tau(m))$ и одновременно $m \notin B(n,\tau(n))$ вытекает, что $\tau(m) \leq d(m,n)$ и одновременно $\tau(n) \leq d(m,n)$. Следовательно, $|\tau(m)-\tau(n)| < d(m,n)$. Лемма доказана.

Без ограничения общности можно считать функцию $\tau(m)$ гладкой. Если это не так, то ее можно аппроксимировать гладкой функцией $\tau^*(m)$, $0 < \tau^*(m) < \tau(m)$ для всех $m \in M$, для которой верно неравенство (1).

Введем на M новую риманову метрику $\langle,\rangle^*$ по формуле $\langle,\rangle^*_m = \frac{1}{\tau^2(m)} \langle,\rangle_m$. Риманово расстояние на M, соответствующее $\langle,\rangle^*$, обозначим через ρ.

Л е м м а 2. Пусть $d(m,n) \geq \tau(m)$. Тогда $\rho(m,n) \geq \frac{1}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma(t)$-произвольная кусочно-гладкая кривая, такая, что $\gamma(a)=m$, $\gamma(b)=n$. Обозначим ее длину в метрике $\langle,\rangle$ через L, т.е. $L=\int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt$. Тогда ее длина в метрике $\langle,\rangle^*$ находится по формуле $L^* = \int_a^b \frac{\|\dot\gamma(t)\|}{\tau(\gamma(t))} dt$.

Используя классическую теорему о среднем, получаем

$$L^* = \frac{1}{\tau(\gamma(\tau))} \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt = \frac{L}{\tau(\gamma(\tau))},$$

где $\tau \in [a,b]$. Далее, $L^* = \frac{L}{\tau(\gamma(\tau)) - \tau(m) + \tau(m)}$ и по лемме 1 $L^* \geq \frac{L}{\tau(m) + d(m,\gamma(\tau))}$.

По условию $L \geq \tau(m)$. Кроме того, $d(m,\gamma(\tau))$ не превосходит длины γ на промежутке $[a,\tau]$, которая в свою очередь не превосходит L, т.е. $L \geq d(m,\gamma(\tau))$. Таким образом, $L^* \geq \frac{L}{L+L} = \frac{1}{2}$.

Так как (2) выполняется для произвольной γ, то $\rho(m,n) \geq \frac{1}{2}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Метрика $\langle,\rangle^*$ по построению конформна первоначальной метрике $\langle,\rangle$. По определению, нормальная карта метрики $\langle,\rangle$ в точке m содержит метрический шар $B(m,\tau(m))$ относительно расстояния d. Из леммы 2 следует, что при $\rho(m,n) < \frac{1}{2}$ выполняется неравенство $d(m,n) < \tau(m)$. Таким образом, нормальная карта метрики $\langle,\rangle$ в любой точке $m \in M$ содержит шар с центром в m радиуса $\frac{1}{2}$ относительно риманова расстояния ρ. Следовательно, $\langle,\rangle^*$ -искомая метрика.

Список литературы

1. Белопольская Я.И., Далецкий Ю.Л. Уравнения Ито и дифференциальная геометрия.-Успехи математических наук, 1982, т.37, вып.3, с.95-142.
2. Elworthy K.D. Stochastic differential equations on manifolds (London Math. Soc. Lect. Notes 70. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982, 326 p.
3. Nomizu K., Ozeki H. The existence of complete Rimannian metrics.- Proc. Amer. Math. Soc., 1961, v. 12, p. 889-891.
4. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., 1971.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981, т.1.